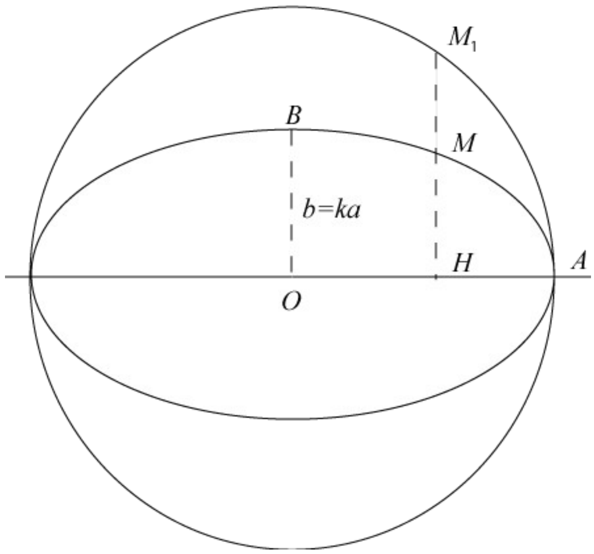
INTRODUCTION AUX ELLIPSES

Robert FERREOL 2024

Il existe plusieurs formes mathématiques correspondant à la notion courante d'ovale (forme convexe ayant deux axes de symétrie), dont un exemple est le bureau ovale de la Maison Blanche. L'ellipse est une de ces formes, avec de nombreuses propriétés mathématiques.

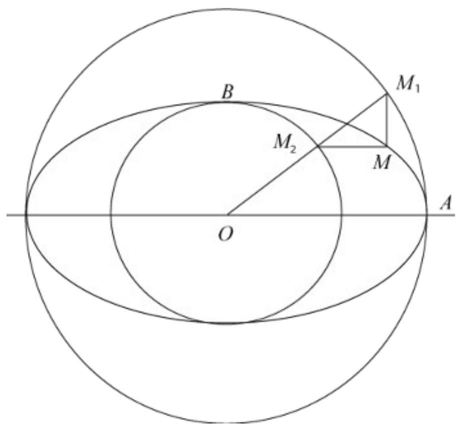
Un cercle aplati ou allongé

Dessinez un cercle et un de ses diamètres, tracez plusieurs segments joignant perpendiculairement le diamètre au cercle et marquez les milieux de ces segments. Vous obtenez par définition une ellipse dont le rayon majeur est le double du mineur. Effectuant ceci plus généralement avec un rapport $k < 1$ vous obtenez une ellipse de *rayon majeur a* et de *rayon mineur* $b = ka$.



On projette un point M_1 d'un cercle de rayon *a* en un point *H* sur un de ses diamètres.
L'ensemble des points M tels que $\frac{\overline{HM}}{\overline{HM_1}}$ est égal à une constante $k < 1$ est l'ellipse de rayon majeur *a* et de rayon mineur $b = ka$

Nous avons ainsi effectué une *affinité* de rapport k , et, ce qui est remarquable, c'est que si nous faisons de même avec une affinité de rapport $1/k$ appliquée à un cercle de rayon *b*, cercle que nous allongeons en quelque sorte, nous obtenons la même ellipse.
La construction précédente nous obligeait à utiliser une règle graduée pour un rapport quelconque ; si nous traçons deux cercles concentriques de rayons *a* et *b*, nous pouvons obtenir grâce à la remarque précédente une construction point par point *à la règle seule* de l'ellipse, construction illustrée dans la preuve sans mot suivante :



Construction de l'ellipse à l'aide des deux cercles « directeurs ».

Définition par foyer et directrice.

La même ellipse peut se définir comme l'ensemble des points dont le rapport de la distance à une droite fixe (une *directrice*) et un point fixe (un *foyer*) est constant.
Cette définition a pour principal intérêt de montrer que l'ellipse fait partie de la famille des coniques, car lorsque le rapport prend toutes les valeurs possibles, on obtient toutes les possibilités de ces courbes.

Si dans un repère porté par les deux axes de symétrie, nous considérons le point *F* de coordonnées $(0,c)$ où $c=\sqrt{a^2-b^2}$, et le point *K* de coordonnées $(0,h=a^2/c)$, l'ellipse est le lieu des points *M* tels que $\frac{MF}{MH}=e=\frac{c}{a}$ où *H* est le projeté de *M* sur la perpendiculaire à l'axe en *K* (appelée *directrice*). Ceci peut se montrer en écrivant $MF^2=e^2MH^2$ sous la forme $(x-c)^2+y^2=e^2(h-x)^2$, laquelle équivaut à l'équation de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Le point *F* est appelé un *foyer* de l'ellipse, nous verrons plus loin pourquoi.
Dans la figure illustrative, des traits en pointillé montrent comment construire foyer et directrice.

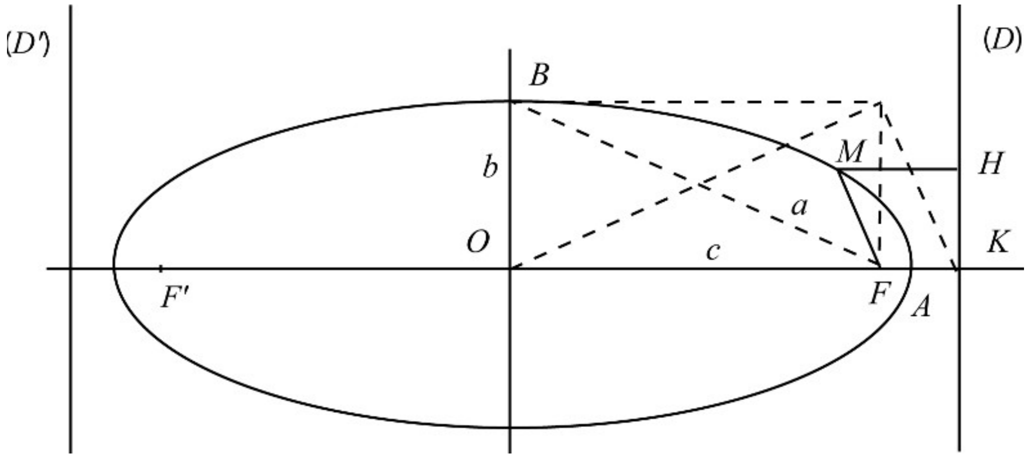


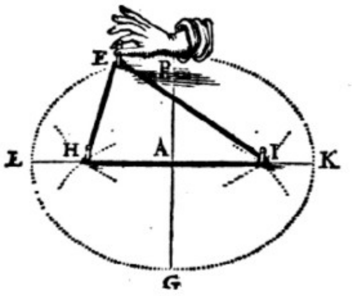
Image 3 : construction de l'ellipse par foyer et directrice.

Ici $e=c/a$ est inférieur à 1 ; pour $e=1$, on obtient la parabole, et pour $e>1$, l'hyperbole, soit les deux autres coniques.

Définition du jardinier.

Pour raison de symétrie, il existe un deuxième foyer F' et l'ellipse est définie à la fois par $MF=eMH$ et $MF'=eMH'$. En ajoutant ces deux équations, on obtient $MF+MF'=e\left(MH+MH'\right)=eKK'=\frac{c}{a}2\frac{a^2}{c}=2a$: l'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante. En d'autres termes on dédouble le centre du cercle de rayon *a*, de sorte que la moyenne des distances aux deux points créés reste constante égale à *a*. Le nombre $e=c/a$ qui mesure l'écart entre un foyer et le centre est caractéristique de l'ellipse à similitude près, d'où son nom d'*excentricité*.

Cette définition, dite « bifocale » a de nombreuses applications.
Tout d'abord le tracé par la méthode dite « du jardinier » illustrée ci-après.

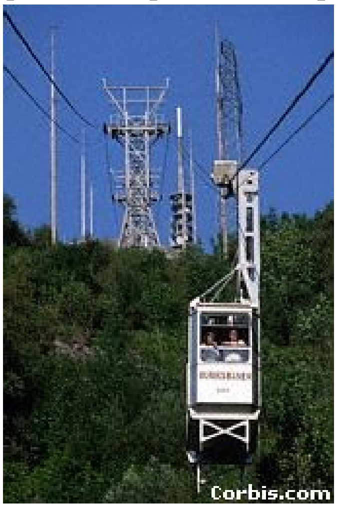


Méthode du jardinier ; la corde doit avoir une longueur de $2(a+c)$

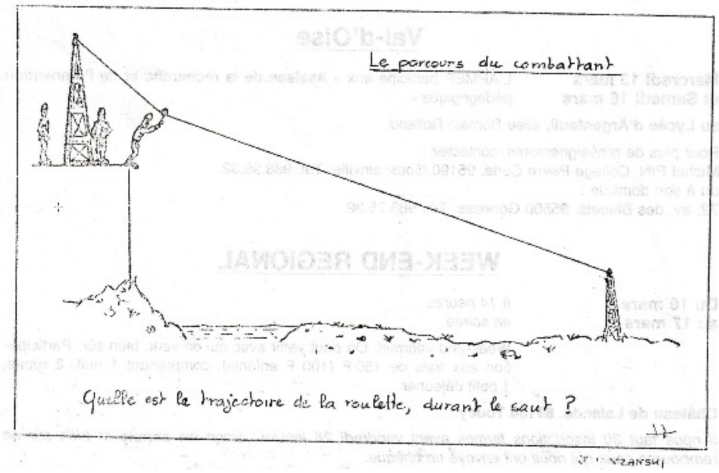
Il y a dans le parc des Buttes-Chaumont à Paris de magnifiques parterres de fleurs elliptiques, mais je n'ai jamais vu de jardinier utiliser cette méthode pour les tracer…

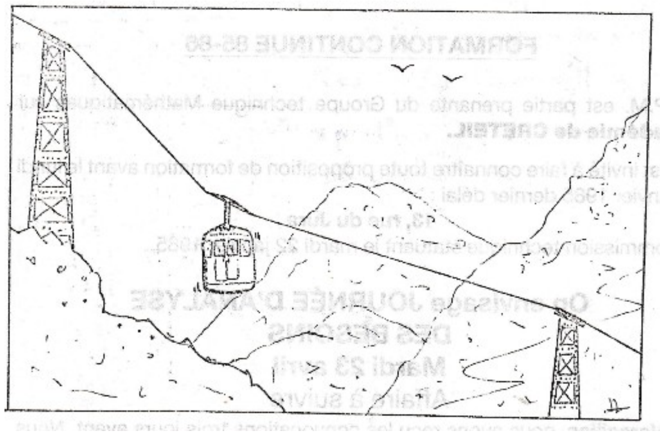
Parterre de fleurs dans les Buttes-Chaumont

Plus anecdotique : à supposer que la longueur du câble reste constante entre deux pylônes, et que celui-ci reste bien tendu entre le téléphérique et les pylônes, la courbe décrite par le téléphérique est une portion d'ellipse.

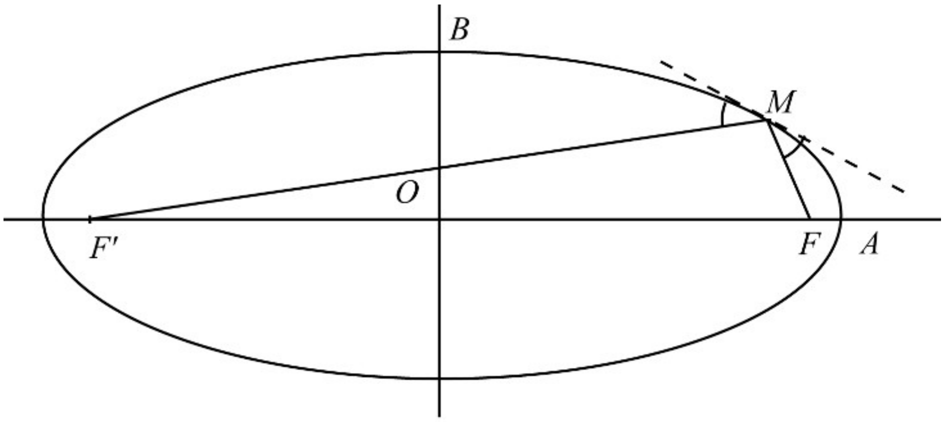


Le téléphérique décrit peu ou prou une portion d'ellipse.



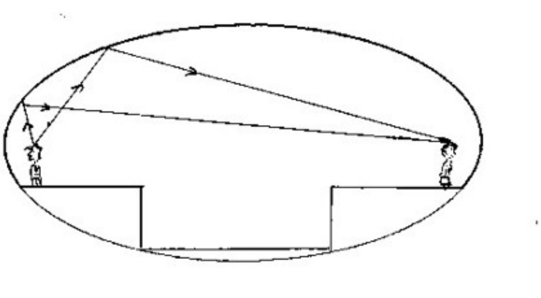


Une propriété de la tangente
Une conséquence de la définition bifocale, obtenue en dérivant l'expression $MF + MF' = 2a$, est que la tangente en un point M de l'ellipse est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$. On en déduit qu'un rayon lumineux issu d'un foyer est réfléchi par l'ellipse, en tout point, en un rayon passant par l'autre foyer (application de la deuxième loi de Descartes). D'où l'appellation « foyer » !



Propriété réflectrice de l'ellipse.

Même propriété pour les ondes sonores, c'est la raison pour laquelle, dans le métro parisien, deux personnes situées aux deux foyers de la voûte elliptique peuvent converser d'un quai à l'autre sans être entendues.



Des salles de l’abbaye de La Chaise Dieu - pour confesser les lépreux - ont une propriété similaire : des chuchotements à tel endroit sont clairement perçus en tel autre et pas ailleurs… Même chose au couvent du désert des lions près de Mexico (galerie des soupirs), au musée du Louvre, à la Cathédrale d'Agrigente en Sicile, etc.

Dans un billard, lors d’un rebond, la boule est déviée par par la même loi de Descartes, d’où la curieuse particularité des billards elliptiques décrite ci-dessous.

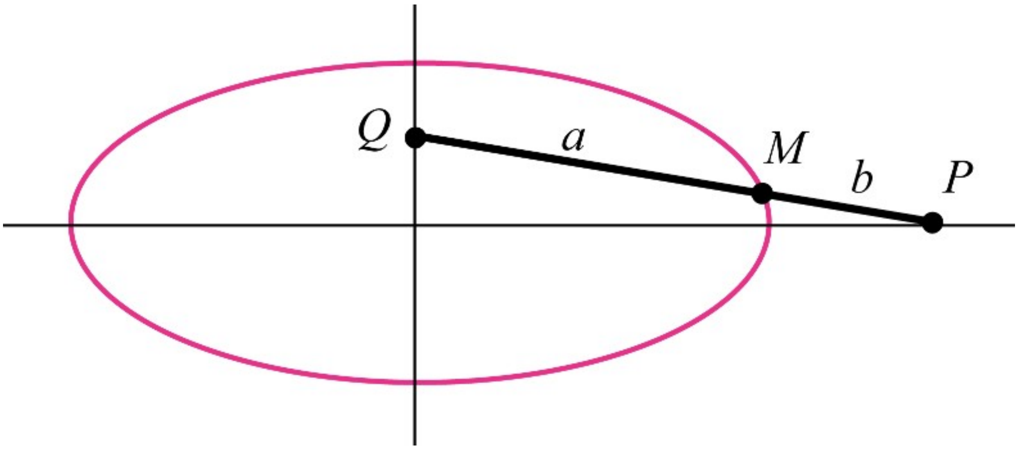
Dans ce billard elliptique, pour mettre la balle dans le trou après un rebond, il suffit de viser l'autre foyer (ce que ne fait pas la personne sur la photo !)

Image prise sur https://www.youtube.com/watch?v=NGiMw4dI8fk

il faudrait que les foyers soient bien placés, et la boule pas forcément placée au foyer !

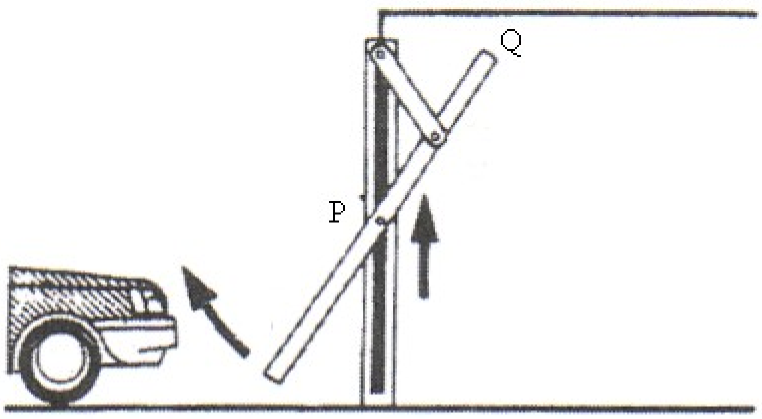
Avec une bande de papier.

Lorsque deux points fixes P et Q d’une droite sont astreints à décrire deux droites perpendiculaires toutes les courbes décrites par les points de la droite, portant le joli nom de glissettes, sont des ellipses. On voit sur la figure ci-dessous comment obtenir une ellipse de paramètres donnés.



Tracé de l'ellipse par « bande de papier ».

Cette méthode est appelée « à la bande de papier » car on peut réellement tracer des points d'une ellipse en découpant un rectangle de papier et en la déplaçant sur une feuille.
Une application plus étonnante est le fait que les points d'une porte de garage décrivent des ellipses, comme on le voit ci-dessous :



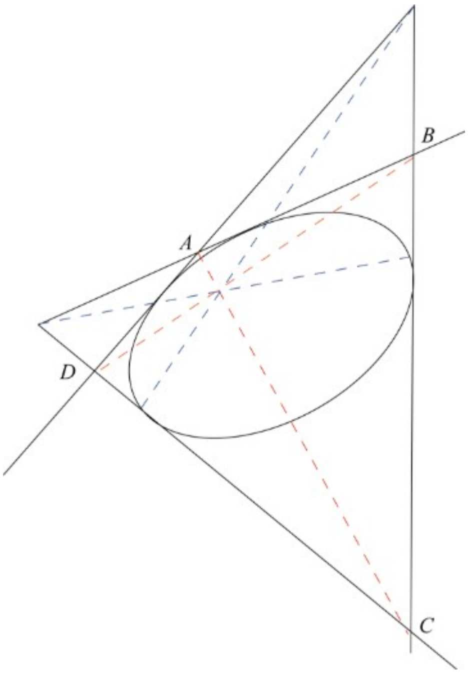
Ellipses dans les portes de garage.

Les ellipses dans l'espace

Les Grecs, et en particulier Apollonius définissaient une conique comme étant le résultat de la section d'un cône de révolution par un plan. C'est une ellipse dans le cas où l'on obtient une courbe fermée.
C'est la raison pour laquelle lorsqu'on projette un faisceau lumineux bien délimité sur un mur, avec une incidence proche de l'angle droit, on obtient un domaine elliptique.

Trace elliptique d'un faisceau lumineux sur un mur…

Et dans les dessins en perspective, les cercles deviennent en général des ellipses.
Dans l'image ci-dessous, on explique comment on obtient les quatre points de contact de l'ellipse avec la perspective d'un carré englobant le cercle, qui est devenu un quadrilatère quelconque (avec quatre tangentes, on trace déjà de belles ellipses !) :

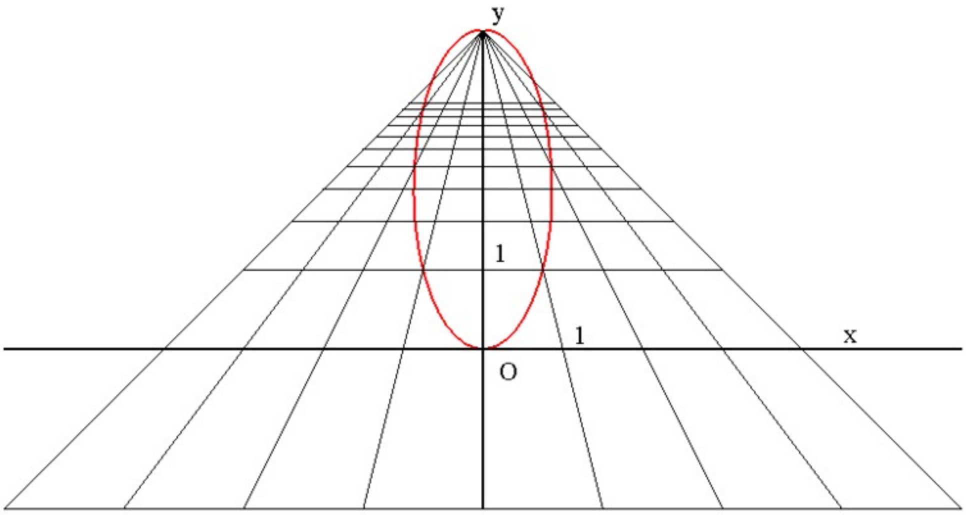


On commence par tracer les diagonales (en rouge) du quadrilatère ABCD perspective du carré de départ, diagonales dont l'intersection est la perspective du centre du cercle, puis les droites issues des points de fuite passant par le centre (en bleu), ce qui donne les points de contact entre l'ellipse et le quadrilatère.

Grâce à la géométrie analytique, on sait maintenant que les coniques sont les courbes de degré 2 non dégénérées du plan, et que toute intersection par un plan d'une surface de degré 2 (une *quadrique*, dont fait partie le cône de révolution) est une courbe de degré 2, donc une conique. Si la courbe est fermée, c'est une ellipse.

Or la perspective d'une courbe dans l'espace est la section, par un plan, du cône issu de notre œil s'appuyant sur la courbe. Donc si nous regardons une conique, nous voyons une conique,

mais le type peut changer ! La perspective d'un cercle est en général une ellipse, mais peut très bien être une parabole ou une hyperbole. C'est par exemple le cas lorsque nous regardons certains gradins d'une arène, lorsque nous sommes à l'intérieur.
Inversement, nous avons illustré la perspective de la courbe d'équation $y = x^2$, donc une parabole, lorsque nous prenons de la hauteur : nous voyons une ellipse !



La perspective d'une parabole peut être une ellipse !